Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра комплексной информационной безопасности электронно-
вычислительных систем (КИБЭВС)

Ю.В. Шабля

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания для выполнения
практических и самостоятельных работ
для студентов технических вузов

Томск, 2021

Содержание

Введение 3
Тема №1: Задача о ресурсах (графический метод) 4
Тема №2: Задача о ресурсах (симплекс-метод) 6
Тема №3: Задача о замене оборудования 9
Тема №4: Решение матричных игр в чистых стратегиях 12
Тема №5: Решение матричных игр в смешанных стратегиях 14
Тема №6: Игры с природой 16
Тема №7: Коалиционные игры (вектор Шепли) 20
Тема №8: Задача о стабильных мэтчингах 22

Введение

Методические указания для выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплинам «Теория игр» и «Исследование операций» подготовлены с целью обучения студентов всех специальностей технических вузов.

Практическая работа направлена на формирование знаний и навыков решения практических задач по каждой теме путём решения соответствующих задач с помощью тренажёров электронного курса.

Самостоятельная работа в формате домашнего задания направлена на закрепление и проверку полученных знаний и навыков решения практических задач по каждой теме путём решения соответствующих задач с помощью тренажёров электронного курса.

Выполнив практические и самостоятельные работы, студенты ознакомятся с основными математическими методами для обоснования решений в различных областях целенаправленной человеческой деятельности, а также приобретут умения и навыки формализации реальных ситуаций, создания правильных математических моделей и грамотного использования математических методов для решения профессиональных задач.

Кроме того, в процессе выполнения практических и самостоятельных работ у студентов будут формироваться способность формулировать задачи и составлять математические модели, способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач (в том числе с использованием вычислительной техники), а также способность проводить обоснование и выбор оптимального решения задач в сфере профессиональной деятельности.

Тема №1: Задача о ресурсах (графический метод)

Краткие теоретические сведения

Задача о ресурсах – вид задачи линейного программирования о составлении оптимального плана выпуска изделий нескольких типов при наличии ограничений на ресурсы, необходимые для изготовления этих изделий.

Задача о ресурсах задается набором типов изделий $\{A_1, \dots, A_n\}$ и набором типов ресурсов $\{B_1, \dots, B_m\}$, из которых можно произвести изделия A_i.

Также известны:

c_i – стоимость продажи одного изделия i-го типа;

a_{ij} – количество ресурса j-го типа, которое необходимо для изготовления одного изделия i-го типа;

b_j – ограничения на затраты ресурсов j-го типа: либо строго заданы $(= b_j)$, либо ограничены снизу $(\geq b_j)$ или сверху $(\leq b_j)$.

Цель – минимизация или максимизация суммарной прибыли от продажи всех изделий.

Графический метод решения основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства, так как при данных условиях можно достаточно легко и наглядно изобразить на координатной плоскости область допустимых решений.

Пример условия задачи

На предприятии изготавливают изделия двух типов. Изделие 1-го типа продаётся за 4 условных единиц, 2-го типа – за 2 условных единиц. Для изготовления изделия 1-го типа нужно: 8 ресурсов 1-го типа, 6 ресурсов 2-го типа и 3 ресурсов 3-го типа. Для изготовления изделия 2-го типа нужно: 3 ресурсов 1-го типа, 10 ресурсов 2-го типа и 1 ресурсов 3-го типа.

При этом: Количество ресурсов 1-го и 2-го типа ограничено: имеется всего 96 ресурсов 1-го типа и 90 ресурсов 2-го типа. Количество ресурсов 3-го типа неограничено и по договору необходимо использовать не менее 3 ресурсов 3-го типа.

Используя графический метод, определите сколько нужно изготовить изделий 1-го (x_1) и 2-го (x_2) типа, чтобы обеспечить минимальную прибыль от их продажи.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 0, F = 4$.

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Составить математическую модель задачи.

Для этого нужно:

1.1) Составить целевую функцию.

1.2) Составить систему ограничений.

2) Построить область допустимых решений в соответствии с ограничениями.

Для этого нужно для каждого ограничения:

2.1) Построить прямую, соответствующую ограничению.

2.2) Определить полуплоскость, которая удовлетворяет ограничению, и сделать соответствующую отметку.

3) Найти координаты угловых точек области допустимых решений.

Для этого нужно для каждой угловой точки области допустимых решений:

3.1) Определить какие прямые пересекаются в этой угловой точке.

3.2) Построить систему уравнений из уравнений этих прямых.

3.3) Найти решение системы уравнений, которое является координатами угловой точки.

4) Вычислить значение целевой функции.

Для этого нужно:

4.1) Вычислить значения целевой функции в найденных угловых точках.

4.2) Если задача на максимум целевой функции, то выбрать наибольшее значение целевой функции, если на минимум, то наименьшее.

Тема №2: Задача о ресурсах (симплекс-метод)

Краткие теоретические сведения

Симплекс-метод – это универсальный метод решения задачи линейного программирования, применяемый для решения задач любой размерности.

Сущность симплекс-метода – целенаправленный перебор вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве, то есть построение базисных решений до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

Пример условия задачи

На предприятии изготавливают изделия двух типов. Изделие 1-го типа продаётся за 4 условных единиц, 2-го типа – за 1 условных единиц. Для изготовления изделия 1-го типа нужно: 10 ресурсов 1-го типа, 4 ресурсов 2-го типа и 10 ресурсов 3-го типа. Для изготовления изделия 2-го типа нужно: 9 ресурсов 1-го типа, 10 ресурсов 2-го типа и 4 ресурсов 3-го типа.

При этом: Количество ресурсов 1-го и 2-го типа ограничено: имеется всего 180 ресурсов 1-го типа и 80 ресурсов 2-го типа. Количество ресурсов 3-го типа неограничено и по договору необходимо использовать не менее 20 ресурсов 3-го типа.

Используя симплекс-метод, определите сколько нужно изготовить изделий 1-го (x_1) и 2-го (x_2) типа, чтобы обеспечить максимальную прибыль от их продажи.

Ответ: $x_1 = 18, x_2 = 0, F = 72.$

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Составить математическую модель задачи.

Для этого нужно:

1.1) Составить целевую функцию.

1.2) Составить систему ограничений.

2) Привести математическую модель задачи к канонической форме.

Для этого нужно добавить в неравенства ограничений новые вспомогательные переменные и изменить знак неравенства $\leq$ на знак равенства =.

3) Составить симплекс-таблицу.

4) Проверить допустимость решения. Если решение является недопустимым, то сменить базис, переход на шаг 4.

Для этого нужно проверить столбец b_j на наличие отрицательных значений (строка F не учитывается), если отрицательных значений нет, то решение является допустимым, иначе сменить базис:

4.1) Определить переменную x_r, которую нужно вывести из базиса.

Для этого нужно в столбце b_j найти минимальное значение, обозначение строки с найденным значением соответствует переменной x_r , которую нужно вывести из базиса.

4.2) Определить переменную x_s , которую нужно ввести в базис.

Для этого нужно в строке x_r среди элементов $a_{x_r i}$ $(i = \overline{1, n+m})$ найти минимальное значение, обозначение столбца с найденным значением соответствует переменной x_s , которую нужно ввести в базис. Если $a_{x_r s} \geq 0$, то задача не имеет решения!

4.3) Преобразовать симплекс-таблицу (ввести в базис переменную x_s вместо переменной x_r).

Для этого нужно выполнить следующие преобразования:

4.3.1) В столбце x_s в строке x_r требуется, чтобы $a_{x_r s} = 1$, для этого нужно поделить все элементы строки на $a_{x_r s}$.

4.3.2) В столбце x_s во всех строках кроме строки x_r требуется, чтобы $a_{jj} = 0$ $(j = \overline{1, m+1}, j \neq x_r)$, для этого нужно из элементов строки вычесть элементы преобразованной строки x_r, умноженной на a_{js}.

4.3.3) Переобозначить строку x_r как x_s.

4.4) Переход на шаг 4.

5) Проверить оптимальность решения. Если решение является неоптимальным, то сменить базис, переход на шаг 5.

Для этого нужно проверить строку F:

- Если задача на минимум и среди элементов c_i $i = \overline{1, n+m}$ положительных значений нет, то решение является оптимальным.

- Если задача на максимум и среди элементов c_i $i = \overline{1, n+m}$ отрицательных значений нет, то решение является оптимальным.

Иначе сменить базис:

5.1) Определить переменную x_s , которую нужно ввести в базис.

Для этого нужно:

- Если задача на минимум, то в строке F среди элементов c_i $i = \overline{1, n+m}$ найти максимальное значение, обозначение столбца с найденным значением соответствует переменной x_s , которую нужно ввести в базис.

- Если задача на максимум, то в строке F среди элементов c_i $i = \overline{1, n+m}$ найти минимальное значение, обозначение столбца с найденным значением соответствует переменной x_s , которую нужно ввести в базис.

5.2) Определить переменную x_r, которую нужно вывести из базиса.

Для этого нужно вычислить оценки для положительных элементов столбца xs последующей формуле: $O_j = b_j \,/\, a_{jj}$ для $a_{jj} > 0$ $j = \overline{1, m}$. Если все $a_{jj} \leq 0$, то задача не ограничена (если задача на минимум, то $F \to -\infty$; если задача на максимум, то $F \to +\infty$)! Среди оценок O_j найти минимальное значение, обозначение строки с найденным значением соответствует переменной x_r , которую нужно вывести из базиса.

5.3) Преобразовать симплекс-таблицу (ввести в базис переменную x_s вместо переменной x_r).

Для этого нужно выполнить следующие преобразования:

5.3.1) В столбце x_s в строке x_r требуется, чтобы $a_{x_r s} = 1$, для этого нужно поделить все элементы строки на $a_{x_r s}$.

5.3.2) В столбце x_s во всех строках кроме строки x_r требуется, чтобы $a_{jj} = 0$ $(j = \overline{1, m+1}, j \neq x_r)$, для этого нужно из элементов строки вычесть элементы преобразованной строки x_r, умноженной на a_{js}.

5.3.3) Переобозначить строку x_r как x_s.

5.4) Переход на шаг 5

6) Определить решение задачи.

Для этого нужно:

6.1) Получить значение целевой функции $F = b_m + 1$.

6.2) Получить значения базисных переменных как значения b_j.

6.3) Переменные, которые не входят в базис, имеют нулевое значение.

Тема №3: Задача о замене оборудования

Краткие теоретические сведения

Задача о замене оборудования – вид задачи динамического программирования об определении оптимальной стратегии эксплуатации оборудования в течение заданного срока.

Задача о замене оборудования задаётся сроком эксплуатации оборудования N , стоимостью оборудования p_0 , набором управляющих решений $\{U_0, \dots, U_n\}$, а также набором функций для вычисления доходов и расходов при переходе системы посредством управляющего решения из одного состояния в другое.

Цель – минимизация или максимизация суммарных затрат на эксплуатацию оборудования с учётом начальной покупки и заключительной продажи оборудования.

Принцип оптимальности (Р. Беллман): Каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

Пример условия задачи

Предприятию необходимо приобрести новое оборудование, которое будет эксплуатироваться в течение $N = 5$ лет, а по истечению данного срока оборудование продаётся.

В конце каждого года можно принять управляющее решение:

- «Сохранить» (оставить имеющееся оборудование и продолжить использовать его в течение следующего года);
- «Заменить» (продать имеющееся оборудование, купить новое оборудование и использовать его в течение следующего года).

Известны:

$p_0 = 44$ – стоимость нового оборудования,

$r(t)$ – затраты на содержание в течение года оборудования возраста *t* лет,

$g(t)$ – доходы от продажи оборудования возраста *t* лет.

t	$r(t)$	$g(t)$
0	5	44
1	5	17
2	12	15
3	21	9
4	25	8
5	32	0

Используя метод динамического программирования, определите такую стратегию эксплуатации оборудования, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на эксплуатацию оборудования с учётом начальной покупки и заключительной продажи оборудования.

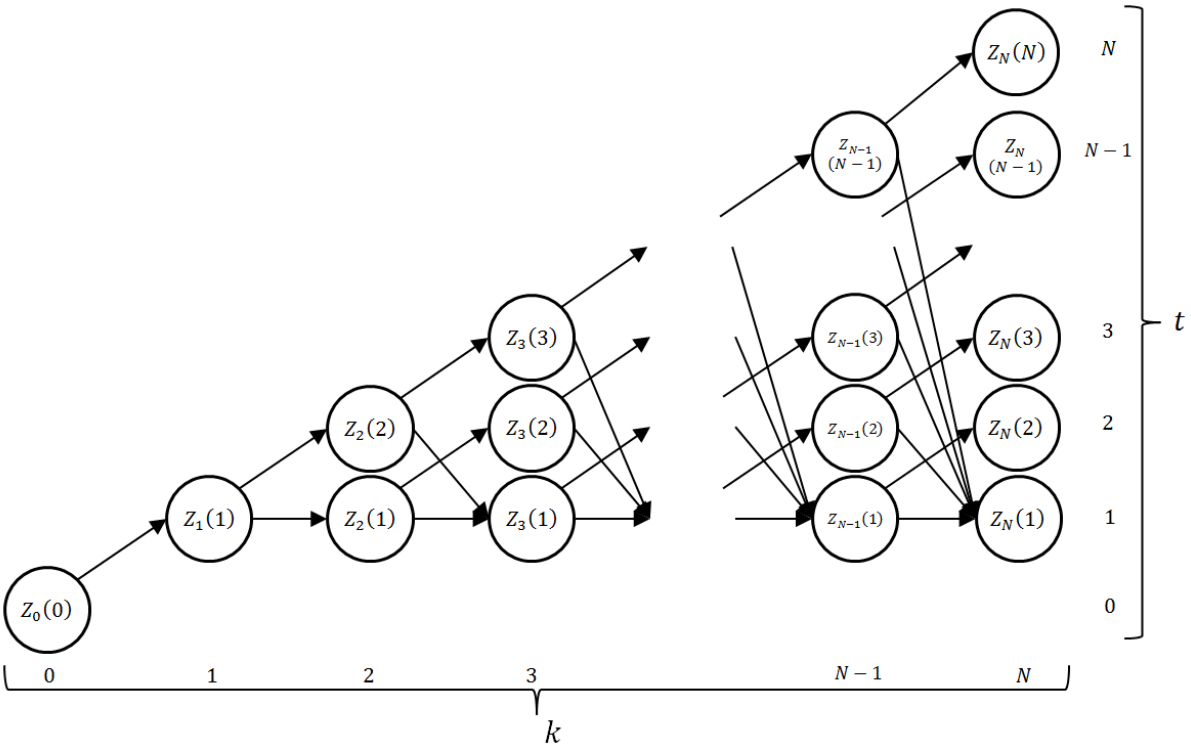
Ответ: Стратегия эксплуатации оборудования: первоначальная покупка нового оборудования и его использование в течение следующего года, в конце 1-го года – «Сохранить», в конце 2-го года – «Заменить» , в конце 3-го года – «Сохранить», в конце 4-го года – «Сохранить», в конце 5-го года – «Продать», $F = 96$.

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Построить размеченный граф состояний.

Для этого нужно построить размеченный граф следующего вида:



1.1) В качестве вершин графа состояний определить все возможные состояния, описываемые следующими параметрами:

- k – номер шага, на котором принимается управляющее решение;
- t – возраст оборудования.

1.2) В качестве рёбер графа состояний определить все возможные переходы из одного состояния в другое.

2) Определить значения рёбер графа состояний.

Для этого нужно:

2.1) Определить значение ребра, соответствующего первоначальной покупке нового оборудования и его использованию в течение следующего года (то есть переход $Z_0(0) \to Z_1(1)$), по формуле: $p_0 + r(0)$.

2.2) Определить значения рёбер, соответствующих управляющему решению «Сохранить» – оставить имеющееся оборудование и продолжить использовать его в течение следующего года (то есть переход $Z_k(t) \to Z_{k+1}(t+1)$), по формуле: $r(t)$.

2.3) Определить значения рёбер, соответствующих управляющему решению «Заменить» – продать имеющееся оборудование, купить новое

оборудование и использовать его в течение следующего года (то есть переход $Z_k(t) \to Z_{k+1}(1)$), по формуле: $-g(t) + p_0 + r(0)$.

3) Определить условные оптимальные значения целевой функции в каждом состоянии.

Для этого нужно:

3.1) Определить условные оптимальные значения целевой функции на N-ом шаге ($Z_N(t)$, $t = \overline{1, N-1}$) по формуле: $Z_N(t) = -g(t)$.

3.2) Определить условные оптимальные значения целевой функции на k-ом шаге ($Z_k(t)$, $k = \overline{1, N-1}$, $t = \overline{1, k}$) по формуле:

- Если задача на минимум:

$$Z_k(t) = \min \begin{cases} r(t) + Z_{k+1}(t+1), \\ -g(t) + p_0 + r(0) + Z_{k+1}(1). \end{cases}$$

– Если задача на максимум:

$$Z_k(t) = \max \begin{cases} r(t) + Z_{k+1}(t+1), \\ -g(t) + p_0 + r(0) + Z_{k+1}(1). \end{cases}$$

При этом нужно сделать соответствующую отметку о выборе оптимального управляющего решения.

3.3) Определить условное оптимальное значение целевой функции на 0-ом шаге ($Z_0(0)$) по формуле: $Z_0(0) = p_0 + r(0) + Z_1(1)$.

4) Определить решение задачи.

Для этого нужно:

4.1) Получить значение целевой функции $F = Z_0(0)$.

4.2) Получить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования с помощью имеющихся отметок об оптимальных управляющих решениях на каждом шаге, начиная с исходного состояния $Z_0(0)$.

Тема №4: Решение матричных игр в чистых стратегиях

Краткие теоретические сведения

Матричная игра – это антогонистическая игра, которая задаётся набором чистых стратегий $\{X_1, \dots, X_n\}$ и $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ первого и второго игроков, а также платёжной матрицей $\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, определяющей выигрыш первого игрока при выборе игроками стратегий X_i и Y_j соответственно.

Антагонистическая игра – это некооперативная игра двух игроков, выигрыши которых противоположны. Цель первого игрока – максимизация своего выигрыша. Цель второго игрока – минимизация выигрыша противника.

Оптимальной чистой стратегией первого игрока является стратегия X_P (максиминная стратегия), для которой выполняется:

$$\max_{1\le i\le n}\left(\min_{1\le j\le m} a_{ij}\right) = a_{Pq} = \alpha.$$

Величину α назовем нижней ценой игры в чистых стратегиях.

Оптимальной чистой стратегией второго игрока является стратегия Y_Q (минимаксная стратегия), для которой выполняется:

$$\min_{1\le j\le m}\left(\max_{1\le i\le n} a_{ij}\right) = a_{pQ} = \beta.$$

Величину β назовем верхней ценой игры в чистых стратегиях.

Если $\alpha = \beta$, то матричная игра имеет решение в чистых стратегиях.

Цена игры в чистых стратегиях – значение выигрыша первого игрока при условии выбора игроками их оптимальных чистых стратегий.

Пример условия задачи

Рассматривается матричная игра, для которой известна платёжная матрица, определяющая выигрыш первого игрока (строки соответствуют стратегиям $\{X_1, \dots, X_3\}$ первого игрока, столбцы – стратегиям $\{Y_1, \dots, Y_3\}$ второго игрока):

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 10 & 2 \\ -9 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & -7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Каждый из игроков хочет максимизировать свой выигрыш.

Определите решение матричной игры в чистых стратегиях.

Ответ: $\alpha = -3, \beta = -3, X_P = X_1, Y_Q = Y_1, v = -3.$

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Вычислить нижнюю цену игры по формуле $\alpha = \max_{\text{i}}\left(\min_{\text{j}} a_{ij}\right)$.

Для этого нужно:

1.1) Определить минимальный платёж первого игрока для каждой его стратегии (то есть найти минимальное значение в каждой строке).

1.2) Определить максимальное значение среди найденных минимальных платежей первого игрока.

1.3) Полученное значение и будет являться нижней ценой игры.

2) Вычислить верхнюю цену игры по формуле $\beta = \min_{j}\left(\max_{i} a_{ij}\right)$.

Для этого нужно:

2.1) Определить максимальный платёж второго игрока для каждой его стратегии (то есть найти максимальное значение в каждом столбце).

2.2) Определить минимальное значение среди найденных максимальных платежей второго игрока.

2.3) Полученное значение и будет являться верхней ценой игры.

3) Определить оптимальную чистую стратегию первого игрока.

Для этого нужно определить оптимальную чистую стратегию первого игрока X_P как стратегию первого игрока, которая соответствует нижней цене игры α.

4) Определить оптимальную чистую стратегию второго игрока.

Для этого нужно определить оптимальную чистую стратегию второго игрока Y_Q как стратегия второго игрока, которая соответствует верхней цене игры β.

5) Определить цену игры.

Для этого нужно определить цену игры v как значение платёжной матрицы a_{PQ}, которое соответствует выбору игроками их оптимальных чистых стратегий X_P и Y_Q.

6) Преобразовать платежную матрицу, убрав все доминируемые стратегии.

Для этого нужно:

6.1) Попробовать найти в платёжной матрице такую пару стратегий $\left(X_{p_1}, X_{p_2}\right)$ первого игрока, для которых выполняется следующее условие: для всех $j = \overline{1,m}$ справедливы неравенства $a_{p_1 j} \geq a_{p_2 j}$ и существует такая стратегия Y_k, что $a_{p_1 k} > a_{p_2 k}$. Тогда стратегия X_{p_1} доминирует стратегию X_{p_2}, а значит из платёжной матрицы можно удалить строку, соответствующую доминируемой стратегии X_{p_2}.

6.2) Попробовать найти в платёжной матрице такую пару стратегий $\left(Y_{q_1}, Y_{q_2}\right)$ второго игрока, для которых выполняется следующее условие: для всех $i = \overline{1,n}$ справедливы неравенства $a_{iq_1} \leq a_{iq_2}$ и существует такая стратегия X_k, что $a_{kq_1} < a_{kq_2}$. Тогда стратегия Y_{q_1} доминирует стратегию Y_{q_2}, а значит из платёжной матрицы можно удалить столбец, соответствующий доминируемой стратегии Y_{q_2}.

6.3) Если в платёжной матрице остался только один элемент либо доминируемых стратегий нет, значит процесс преобразования платёжной матрицы завершён. Иначе переход к пункту 6.1.

Тема №5: Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Краткие теоретические сведения

Если нижняя и верхняя цены игры не совпадают ($\alpha \neq \beta$), то решения матричной игры в чистых стратегиях не существует. В таких случаях ищут решение игры в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия – это произвольное вероятностное распределение на множестве чистых стратегий:

$P = p_1, \dots, p_n$ – смешанная стратегия первого игрока, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

$Q = q_1, \dots, q_m$ – смешанная стратегия второго игрока, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Цена игры в смешанных стратегиях – это математическое ожидание выигрыша первого игрока при применении игроками смешанных стратегий:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j.$$

Пример условия задачи

Рассматривается матричная игра, для которой известна платёжная матрица, определяющая выигрыш первого игрока (строки соответствуют стратегиям $\{X_1, X_2\}$ первого игрока, столбцы – стратегиям $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ второго игрока):

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & 9 & -9 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Каждый из игроков хочет максимизировать свой выигрыш.

Используя графический метод (или симплекс-метод), определите решение матричной игры в смешанных стратегиях.

Ответ: $p_1 = 2/9$, $p_2 = 7/9$, $q_1 = 11/18$, $q_2 = 7/18$, $q_3 = 0$, $v = 4/9$.

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Вычислить нижнюю цену игры по формуле $\alpha = \max\limits_{\text{i}} \left(\min\limits_{\text{j}} a_{ij} \right)$.

Для этого нужно:

1.1) Определить минимальный платёж первого игрока для каждой его стратегии (то есть найти минимальное значение в каждой строке).

1.2) Определить максимальное значение среди найденных минимальных платежей первого игрока.

1.3) Полученное значение и будет являться нижней ценой игры.

2) Вычислить верхнюю цену игры по формуле $\beta = \min\limits_{\text{j}} \left(\max\limits_{\text{i}} a_{ij} \right)$.

Для этого нужно:

2.1) Определить максимальный платёж второго игрока для каждой его стратегии (то есть найти максимальное значение в каждом столбце).

2.2) Определить минимальное значение среди найденных максимальных платежей второго игрока.

2.3) Полученное значение и будет являться верхней ценой игры.

3) Определить оптимальную смешанную стратегию первого игрока.

Для этого нужно:

3.1) Используя графический метод (или симплекс-метод) найти решение следующей задачи линейного программирования:

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{v} = \frac{1}{v} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = \overline{1,m}), \\ x_i \geq 0 \qquad\qquad (i = \overline{1,n}). \end{cases}$$

3.2) Определить цену игры для преобразованной платёжной матрицы по формуле: $v^* = 1/F$.

3.3) Определить оптимальную смешанную стратегию первого игрока $P = \{p_1, p_2\}$ по формуле: $p_i = v^* x_i$.

4) Определить оптимальную смешанную стратегию второго игрока.

Для этого нужно:

4.1) Используя графический метод (или симплекс-метод) найти решение следующей задачи линейного программирования:

$$F = \sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{q_j}{v} = \frac{1}{v} \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq 1 \quad (i = \overline{1,n}), \\ y_j \geq 0 \qquad\qquad (j = \overline{1,m}). \end{cases}$$

4.2) Определить цену игры для преобразованной платёжной матрицы по формуле: $v^* = 1/F$.

4.3) Определить оптимальную смешанную стратегию второго игрока $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ по формуле: $q_j = v^* y_j$.

5) Определить цену игры.

Для этого нужно определить цену игры v для исходной платёжной матрицы по формуле: $v = v^* + \min(a_{ij}, 0)$.

Тема №6: Игры с природой

Краткие теоретические сведения

Неопределённость – ситуация, когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника. В таких задачах выбор решения зависит от состояния объективной действительности, называемой «природой», а математические модели называются «игрой с природой».

Игра с природой – игра, в которой осознанно действует только один из игроков. Природа – это обобщенное понятие противника, который не преследует собственных целей в данном конфликте (такая ситуация может быть названа конфликтом лишь условно). Природа может принимать одно из своих возможных состояний и не имеет целью получение выигрыша.

Игра с природой представляется в виде платёжной матрицы, элементы которой – это выигрыши игрока, которые не являются проигрышами природы.

Предположим, что игроку известны только состояния, в которых случайным образом может находиться природа. Тогда для отбора стратегии применяют следующие критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- Критерий оптимизма: предназначен для выбора наибольшего элемента платёжной матрицы из её максимально возможных элементов

$$K_O = \max_{1\le i\le n}\left(\max_{1\le j\le m} a_{ij}\right).$$

- Критерий пессимизма: предназначен для выбора наименьшего элемента платёжной матрицы из её минимально возможных элементов

$$K_P = \min_{1\le i\le n}\left(\min_{1\le j\le m} a_{ij}\right).$$

- Критерий Вальда: предназначен для выбора наибольшего элемента платёжной матрицы из её минимально возможных элементов

$$K_W = \max_{1\le i\le n}\left(\min_{1\le j\le m} a_{ij}\right).$$

- Критерий Сэвиджа: предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы рисков из её максимально возможных элементов

$$K_S = \min_{1\le i\le n}\left(\max_{1\le j\le m} r_{ij}\right), \qquad r_{ij} = \max_{1\le i\le n}(a_{ij}) - a_{ij}.$$

- Критерий Гурвица: предназначен для выбора среднего элемента платёжной матрицы, отличающегося от крайних минимального и максимального состояний

$$K_H = \max_{1\le i\le n}\left(\lambda\cdot\max_{1\le j\le m}(a_{ij}) + (1-\lambda)\cdot\min_{1\le j\le m}(a_{ij})\right).$$

- Обобщённый критерий: для выбора наиболее эффективного варианта стратегии применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться та стратегия, на которую указывает большинство критериев оптимальности.

Пример условия задачи

Рассматривается ситуация принятия решения в условиях неопределённости, для которой известна платёжная матрица, определяющая выигрыш первого игрока (строки соответствуют стратегиям $\{X_1, \dots, X_5\}$ игрока, столбцы – состояниям природы $\{Y_1, \dots, Y_5\}$):

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 & 10 & -6 \\ 10 & -4 & 6 & -3 & -2 \\ -2 & -6 & -8 & -3 & -9 \\ -6 & -4 & 8 & -7 & 6 \\ 4 & 4 & -3 & -9 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Определите значение критериев оптимизма, пессимизма, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (при коэффициенте оптимизма $\lambda = 0.7$) и соответствующие им оптимальные стратегии.

Ответ: $K_O = 10$ (оптимальные стратегии: X_1, X_2), $K_P = -10$ (оптимальные стратегии: X_5), $K_W = -4$ (оптимальные стратегии: X_2), $K_S = 13$ (оптимальные стратегии: X_2), $K_H = 5.8$ (оптимальные стратегии: X_2).

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма (критерий оптимизма):

1) Вычислить значение критерия оптимизма по формуле

$$K_O = \max_{1 \le i \le n} \left(\max_{1 \le j \le m} a_{ij} \right).$$

Для этого нужно:

1.1) Определить максимальный платёж игрока для каждой его стратегии (то есть найти максимальное значение в каждой строке).

1.2) Определить максимальное значение среди найденных максимальных платежей игрока.

1.3) Полученное значение и будет являться значением критерия оптимизма.

2) Определить оптимальные стратегии по критерию оптимальности.

Для этого нужно определить соответствие между стратегиями игрока и значением критерия оптимальности (те стратегии, которые соответствуют критерию оптимальности, являются оптимальными).

Основные шаги алгоритма (критерий пессимизма):

1) Вычислить значение критерия пессимизма по формуле

$$K_P = \min_{1 \le i \le n} \left(\min_{1 \le j \le m} a_{ij} \right).$$

Для этого нужно:

1.1) Определить минимальный платёж игрока для каждой его стратегии (то есть найти минимальное значение в каждой строке).

1.2) Определить минимальное значение среди найденных минимальных платежей игрока.

1.3) Полученное значение и будет являться значением критерия пессимизма.

2) Определить оптимальные стратегии по критерию оптимальности.

Для этого нужно определить соответствие между стратегиями игрока и значением критерия оптимальности (те стратегии, которые соответствуют критерию оптимальности, являются оптимальными).

Основные шаги алгоритма (критерий Вальда):

1) Вычислить значение критерия Вальда по формуле

$$K_W = \max_{1 \le i \le n} \left(\min_{1 \le j \le m} a_{ij} \right).$$

Для этого нужно:

1.1) Определить минимальный платёж игрока для каждой его стратегии (то есть найти минимальное значение в каждой строке).

1.2) Определить максимальное значение среди найденных минимальных платежей игрока.

1.3) Полученное значение и будет являться значением критерия Вальда.

2) Определить оптимальные стратегии по критерию оптимальности.

Для этого нужно определить соответствие между стратегиями игрока и значением критерия оптимальности (те стратегии, которые соответствуют критерию оптимальности, являются оптимальными).

Основные шаги алгоритма (критерий Сэвиджа):

1) Вычислить значение критерия Сэвиджа по формуле

$$K_S = \min_{1 \le i \le n} \left(\max_{1 \le j \le m} r_{ij} \right).$$

Для этого нужно:

1.1) Определить максимальный платёж игрока для каждого состояния природы (то есть найти максимальное значение в каждом столбце).

1.2) Вычислить матрицу рисков R по формуле: $r_{ij} = \max_{1 \le i \le n} (a_{ij}) - a_{ij}$.

1.3) Определить максимальный риск игрока для каждой его стратегии (то есть найти максимальное значение в каждой строке).

1.4) Определить минимальное значение среди найденных максимальных рисков.

1.5) Полученное значение и будет являться значением критерия Сэвиджа.

2) Определить оптимальные стратегии по критерию оптимальности.

Для этого нужно определить соответствие между стратегиями игрока и значением критерия оптимальности (те стратегии, которые соответствуют критерию оптимальности, являются оптимальными).

Основные шаги алгоритма (критерий Гурвица):

1) Вычислить значение критерия Гурвица по формуле

$$K_H = \max_{1 \le i \le n} \left(\lambda \cdot \max_{1 \le j \le m} (a_{ij}) + (1 - \lambda) \cdot \min_{1 \le j \le m} (a_{ij}) \right).$$

Для этого нужно:

1.1) Определить максимальный платёж игрока для каждой его стратегии (то есть найти максимальное значение в каждой строке).

1.2) Определить минимальный платёж игрока для каждой его стратегии (то есть найти минимальное значение в каждой строке).

1.3) Вычислить значение $\lambda \cdot \max\limits_{1 \le j \le m}(a_{ij}) + (1-\lambda) \cdot \min\limits_{1 \le j \le m}(a_{ij})$ для каждой стратегии игрока.

1.4) Определить максимальное значение среди полученных значений.

1.5) Полученное значение и будет являться значением критерия Гурвица.

2) Определить оптимальные стратегии по критерию оптимальности.

Для этого нужно определить соответствие между стратегиями игрока и значением критерия оптимальности (те стратегии, которые соответствуют критерию оптимальности, являются оптимальными).

Основные шаги алгоритма (обобщённый критерий):

1) Для каждой стратегии игрока посчитать количество критериев оптимальности, для которых она является оптимальной.

2) Стратегия, для которой полученное значение является максимальным, и будет оптимальной стратегией.

Тема №7: Коалиционные игры (вектор Шепли)

Краткие теоретические сведения

В коалиционных или в кооперативных играх разрешены сговоры, то есть игроки могут вступать в коалиции с целью увеличения своего выигрыша.

Пусть задано множество всех игроков N. Коалиция K – это любое подмножество множества всех игроков ($K \subseteq N$). Большая коалиция – это коалиция, состоящая из всех игроков, участвующих в этой игре.

Характеристическая функция $v(K)$ – это функция, которая ставит в соответствие каждой коалиции $K \subseteq N$ её выигрыш.

Свойство супераддитивности: объединившись, две непересекающиеся коалиции получают выигрыш, который не меньше, чем сумма выигрышей коалиций, которые они могли получить по отдельности друг от друга. Тогда предполагаем, что игроки ведут себя кооперативно и формируют большую коалицию. Вопрос: «Как поделить выигрыш большой коалиции между игроками?».

Вектор выигрышей игроков (делёж) – это произвольный вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i – это выигрыш, который получает i-й игрок. Решением коалиционной игры будем называть множество допустимых векторов выигрышей игроков. Это множество будет иметь разный вид в зависимости от того, какую концепцию решения мы выберем.

Вектор Шепли – это вектор выигрышей игроков, который обладает свойствами:

1) эффективности: весь выигрыш большой коалиции должен быть распределен между игроками и не должно остаться ничего лишнего, что не распределено между игроками;

2) симметричности: симметричные игроки i и j (игроки, которые вносят одинаковый вклад в коалицию) получают одинаковые выигрыши;

3) аксиомы «Болвана»: бесполезные игроки («Болваны» – игроки, которые не вносят никакого вклада ни в одну из коалиций) получают нулевой выигрыш;

4) линейности: выигрыш любого игрока в игре, представляющей комбинацию двух игр, должен быть равен сумме его выигрышей в этих играх.

В рамках данной концепции акцент делается на справедливости решения.

Вектор Шепли можно вычислить по формуле:

$$x_i = \sum_{K \ni i} \frac{(|K|-1)!\,(|N|-|K|)!}{|N|!}\big(v(K) - v(K\{i\})\big).$$

Пример условия задачи

Три друга Боря, Витя и Галя хотят открыть в банке вклад на 1 год. У Бори имеется 110000 рублей, у Вити – 110000 рублей, а у Гали – 490000 рублей. Годовая процентная ставка по вкладу зависит от суммы вклада следующим образом:

– 4.2% при сумме вклада менее 30000 рублей;

– 5.3% при сумме вклада в диапазоне от 30000 рублей до 50000 рублей;

– 6.8% при сумме вклада в диапазоне от 50000 рублей до 330000 рублей;

– 8.1% при сумме вклада в диапазоне от 330000 рублей до 540000 рублей;

– 9.2% при сумме вклада от 540000 рублей.

Для получения большей выгоды Боря, Витя и Галя решили объединить свои денежные средства и открыть общий вклад. Используя вектор Шепли, определите как поделить полученную прибыль за 1 год.

Ответ: $x_{\text{Боря}} \approx 9698.33$, $x_{\text{Витя}} \approx 9698.33$, $x_{\text{Галя}} \approx 45923.33$.

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Определить все возможные коалиции K.

2) Определить объём денежных средств, которыми владеет каждая из всех возможных коалиций игроков.

3) Вычислить полученную прибыль за 1 год $v(K)$ для каждой из всех возможных коалиций K.

4) Вычислить вектор выигрышей игроков по формуле:

$$x_i = \sum_{K \ni i} \frac{(|K|-1)!\,(|N|-|K|)!}{|N|!}\big(v(K) - v(K\{i\})\big).$$

Тема №8: Задача о стабильных мэтчингах

Краткие теоретические сведения

Имеется два множества. Для каждого из этих множеств элементы одного множества имеют свои предпочтения на втором множестве. Требуется найти стабильные соответствия между элементами двух множеств, то есть чтобы каждый элемент был «доволен».

Мэтчинг μ – это отображение элементов из одного множества в элементы другого множества. Запись: $\mu(a) = b$, если в мэтчинге μ элементу a соответствует элемент b.

Мэтчинг μ обладает свойством индивидуальной рациональности, если для любого элемента a альтернатива $\mu(a)$ лучше альтернативы a.

Мэтчинг μ обладает свойством парной рациональности, если не существует таких элементов a и b, что:

- для элемента a альтернатива b лучше альтернативы $\mu(a)$;

и

- для элемента b альтернатива a лучше альтернативы $\mu(b)$.

Мэтчинг μ называется стабильным, если он обладает свойствами индивидуальной и парной рациональности

Пример условия задачи

Для написания диплома студентам $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ нужно распределиться между научными руководителями $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$.

Известна информация о предпочтениях студентов (первым записан наиболее предпочитаемый студентом научный руководитель, далее записаны оставшиеся варианты в порядке убывания):

Предпочтения для s_1: $\{r_2, r_3, r_5, r_4, r_1, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для s_2: $\{r_2, r_4, r_5, r_1, r_3, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для s_3: $\{r_1, r_3, r_2, r_5, r_4, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для s_4: $\{r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для s_5: $\{r_2, r_1, r_5, r_4, r_3, \text{остаться одному}\}$.

Известна информация о предпочтениях научных руководителей (первым записан наиболее предпочитаемый научным руководителем студент, далее записаны оставшиеся варианты в порядке убывания):

Предпочтения для r_1: $\{s_2, s_1, s_3, s_5, s_4, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для r_2: $\{s_4, s_1, s_3, s_2, s_5, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для r_3: $\{s_4, s_1, s_5, s_3, s_2, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для r_4: $\{s_5, s_3, s_2, s_4, s_1, \text{остаться одному}\}$;

Предпочтения для r_5: $\{s_4, s_1, s_2, s_3, s_5, \text{остаться одному}\}$.

Используя алгоритм отсроченного принятия предложения, в котором студенты ходят по научным руководителям, определите как распределить студентов между научными руководителями, чтобы образовался стабильный мэтчинг.

Ответ: $s_1 \to r_2$, $s_2 \to r_1$, $s_3 \to r_3$, $s_4 \to r_5$, $s_5 \to r_4$.

Алгоритм решения задачи

Основные шаги алгоритма:

1) Каждый студент, для которого ещё не определён научный руководитель, предлагает свою кандидатуру наиболее предпочитаемому научному руководителю среди ещё не опрошенных им научных руководителей. Если для всех студентов определён научный руководитель или неопрошенные научные руководители закончились, то переход на шаг 3.

2) Каждый научный руководитель из всех поступивших к нему предложений от студентов (в том числе и из более ранних предложений) выбирает наилучшее и отвечает на него «возможно», а на все остальные отвечает отказом. Переход на шаг 2.

3) Все ответы «возможно» меняются на согласие, таким образом образуется распределение студентов по научным руководителям.